Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

3

Отдельный оттиск

1 9 7 8

УДК 519.21

В. А. Малышев
Ю. А. Терлецкий

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПОЛЕЙ

В работе [1] доказана центральная предельная теорема для случайного поля на целочисленной решетке, которое принимает в каждой точке значение ± 1. В настоящей статье этот результат перенесен на более общую ситуацию, когда случайные величины (возможно, некоммутативные) принимают значения в некоторой алгебре. При этом удалось усилить также результат [2]: мы отказываемся от требования, чтобы случайные величины принадлежали C^*-алгебре; от требования асимптотической абелевости и, что наиболее важно, ослабляем условие экспоненциального убывания корреляций. О возможных применениях этих результатов идет речь в работе [1].

Пусть на нормированной $*$-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей e (над полем $\mathbf{C}$) задано состояние, то есть линейный непрерывный положительный функционал φ, такой, что $\varphi(e)=1$.

Случайной величиной будем называть любой элемент a алгебры $\mathfrak{A}$. Моменты случайной величины определяются так:

$$Ea = E_1 a = \langle a \rangle = \varphi(a), \quad E_k a = \langle a^k \rangle = \varphi(a^k), \quad Da = \langle (a - \langle a \rangle e)^2 \rangle.$$

Если $T = (t_1, \ldots, t_n)$ — упорядоченный набор индексов и $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}$ — случайные величины, снабженные этими индексами, то произведение $a_{t_1} \ldots a_{t_n} = \prod_{i=1}^{n} a_{t_i}$ будем обозначать символом a_T, $\langle a_T \rangle = \varphi(a_T)$.

Усеченную корреляционную функцию $<\ldots>^{\mathrm{tr}}$ (семиинварианты) определяет рекуррентное соотношение

$$\langle a_T \rangle = \sum_{\beta} \langle a_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle a_{T_{l(\beta)}} \rangle^{\mathrm{tr}}, \tag{1}$$

в котором суммирование происходит по всевозможным разбиениям β набора T на $l(\beta)$ таких частей $T_1, T_2, \ldots, T_{l(\beta)}$, в которых порядок не нарушается.

Соотношение (1) при $t_1 = \ldots = t_n$ дает аналогичное известному в обычной (коммутативной) теории вероятностей определение семиинвариантов через моменты:

$$\langle a^n \rangle = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_p=n \\ 1 \leqslant p \leqslant n}} \langle a^{k_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle a^{k_p} \rangle^{\mathrm{tr}},$$

или

$$\langle a^n \rangle = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_p=n \\ 1 \leqslant p \leqslant n}} M_{k_1}(a) \ldots M_{k_p}(a). \tag{2}$$

Случайное поле на $\mathbf{R}^\nu$ со значениями в $\mathfrak{A}$ зададим линейным непрерывным отображением ξ гильбертового комплексного пространства $L_2(\mathbf{R}^\nu)$ в алгебру $\mathfrak{A}$.

Кубом V в $\mathbf{R}^\nu$ будем называть множество вида $\{x\in\mathbf{R}^\nu: -m\leqslant x_j<m,\ 1\leqslant j\leqslant\nu\}$, где m — натуральное, $\chi_V(x)$ — характеристическая функция куба V. Для произвольной $f(x)$, заданной на $\mathbf{R}^\nu$, функцию $f(x)\chi_V(x)$ обозначим $f_V(x)$. Пусть $V\to\infty$ есть направленное множество кубов, упорядоченное по включению.

Мы докажем асимптотическую гауссовость нормированной случайной величины $\tilde{\xi}(f_V)=\dfrac{\xi(f_V)-\langle\xi(f_V)\rangle e}{\sqrt{D[\xi(f_V)]}}$ при $V\to\infty$. Точнее, будет доказана следующая

Теорема. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция на $\mathbf{R}^\nu$. При выполнении условия

$$\frac{D[\xi(f_V)]}{|V|}\xrightarrow[V\to\infty]{}D_0\neq 0$$

и условия слабого экспоненциального убывания корреляций, формулируемого ниже, семиинварианты $M_n[\tilde{\xi}(f_V)]$ случайной величины $\tilde{\xi}(f_V)$ сходятся при $V\to\infty$ к семиинвариантам нормированной гауссовой случайной величины, то есть к нулю при $n\geqslant 3$.

Условие слабого экспоненциального убывания корреляций состоит в следующем: существуют положительные константы c_1 и c_2, зависящие от K, такие, что

$$\left|\left\langle\prod_{i=1}^{n}\xi(f_i)\right\rangle-\left\langle\prod_{i=1}^{k}\xi(f_i)\right\rangle\left\langle\prod_{i=k+1}^{n}\xi(f_i)\right\rangle\right|<c_1\exp\{-c_2d\},$$

если $\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\leqslant K$. Здесь $d=d\left(\operatorname{supp}\sum_{i=1}^{k}|f_i|,\ \operatorname{supp}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i|\right)$ — евклидово расстояние между множествами в $\mathbf{R}^\nu$; $f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots,f_n$ — произвольный набор функций из $L_2(\mathbf{R}^\nu)$, $\|\ldots\|\equiv\|\ldots\|_{L_2(\mathbf{R}^\nu)}$.

В пространстве $\mathbf{R}^\nu$ выделим подмножество $\mathbf{Z}^\nu$ точек с целочисленными координатами (целочисленная решетка) и рассмотрим следующее семейство функций:

$$u_i(x)=\begin{cases}1, \text{ если } i_s\leqslant x_s<i_s+1,\ s=1,2,\ldots,\nu;\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Здесь $i=(i_1,\ldots,i_\nu)$ — точка решетки $\mathbf{Z}^\nu$. Очевидно, что

$$\chi_V(x)=\sum_{i\in V}u_i(x)\quad\text{и}\quad\sum_{i\in\mathbf{Z}^\nu}u_i(x)\equiv 1,$$

а функция $f_V(x)$ может быть записана в виде конечной суммы

$$f_V(x)=\sum_{i\in V}f_i(x),\quad\text{где}\quad f_i(x)=f(x)u_i(x).$$

Пусть $T=(t_1,\ldots,t_n)$ — упорядоченный набор точек решетки $\mathbf{Z}^\nu$, причем равенство $t_k=t_l$ при $k\neq l$ допускается. Произведение $\prod_{k=1}^{n}\xi(f_{t_k})$ будем обозначать символом ξ_T.

Лемма 1. Для всех $n \geqslant 1$

$$M_n[\xi(f_V)] = \sum_{T:|T|=n} \langle \xi_T \rangle^{\mathrm{tr}},$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам T мощности n, таким, что для каждого t_k из T выполняется $t_k \in V$, то есть $T \subset V$.

При доказательстве леммы (индукцией по n) будем пользоваться соотношением (2). При $n=1$ утверждение леммы очевидно. В самом деле,

$$M_1[\xi(f_V)] = M_1\left[\xi\left(\sum_{i \in V} f_i\right)\right] = \left\langle \sum_{i \in V} \xi(f_i) \right\rangle = \sum_{i \in V} \langle \xi(f_i) \rangle = \sum_{i \in V} \langle \xi(f_i) \rangle^{\mathrm{tr}}.$$

Далее в силу соотношения (2) имеем

$$M_n[\xi(f_V)] = \langle [\xi(f_V)]^n \rangle - \sum_{\substack{2 \leqslant p \leqslant n \\ i_1 + \ldots + i_p = n}} M_{i_1}[\xi(f_V)] \ldots M_{i_p}[\xi(f_V)]. \tag{3}$$

Выражение в правой части равенства (3) преобразуем следующим образом:

$$\langle [\xi(f_V)]^n \rangle = \left\langle \left[\sum_i \xi(f_i)\right]^n \right\rangle = \left\langle \sum_{T:|T|=n} \xi(f_{t_1}) \ldots \xi(f_{t_n}) \right\rangle =$$

$$= \sum_{T:|T|=n} \langle \xi(f_{t_1}) \ldots \xi(f_{t_n}) \rangle = \sum_{T:|T|=n} \langle \xi_T \rangle. \tag{4}$$

В полученной сумме для любого набора $T = (t_1, \ldots, t_n)$ среднее $\langle \xi_T \rangle$ представим так:

$$\langle \xi_T \rangle = \langle \xi_T \rangle^{\mathrm{tr}} + \sum_{\beta \neq I} \langle \xi_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle \xi_{T_{l(\beta)}} \rangle^{\mathrm{tr}},$$

где I — тождественное разбиение набора T. Тогда выражение (4) примет вид

$$\langle [\xi(f_V)]^n \rangle = \sum_{T:|T|=n} \langle \xi_T \rangle^{\mathrm{tr}} + \sum_{T:|T|=n} \sum_{\beta \neq I} \langle \xi_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle \xi_{T_{l(\beta)}} \rangle^{\mathrm{tr}}. \tag{5}$$

(Здесь происходит суммирование по всевозможным наборам мощности n и по всем нетождественным разбиениям этих наборов.)

Пусть (индуктивное предположение) утверждение леммы выполняется для всех натуральных чисел, меньших n. Тогда имеем

$$\sum_{\substack{2 \leqslant p \leqslant n \\ i_1 + \ldots + i_p = n}} M_{i_1}[\xi(f_V)] \ldots M_{i_p}[\xi(f_V)] =$$

$$= \sum_{\substack{2 \leqslant p \leqslant n \\ i_1 + \ldots + i_p = n}} \sum_{T_1:|T_1|=i_1} \langle \xi_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \sum_{T_p:|T_p|=i_p} \langle \xi_{T_p} \rangle^{\mathrm{tr}} = \sum_{T:|T|=n} \sum_{\beta \neq I} \langle \xi_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle \xi_{T_{l(\beta)}} \rangle^{\mathrm{tr}}. \tag{6}$$

Из (3), (5) и (6) получаем, таким образом, что

$$M_n[\xi(f_V)] = \sum_{T:|T|=n} \langle \xi_T \rangle^{\mathrm{tr}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует последовательность $\{b_k\}$, $b_k>0$, такая, что $|<\xi_T>|\leqslant b_{|T|}$.

Доказательство. Пусть $|f(x)|\leqslant M$. При $|T|=1$ утверждение леммы следует из непрерывности φ и ξ и ограниченности $f(x)$. В самом деле,

$$|\langle\xi(f_i)\rangle|=|\varphi(\xi(f_i))|\leqslant\|\xi(f_i)\|\leqslant\|\xi\|\,\|f_i\|,$$

а $\|f_i\|\leqslant M$. Заметим, что $\|\varphi\|=1$. Пусть справедливость леммы доказана для всех $T:|T|<k$. При $T:|T|=k$ из условия слабого экспоненциального убывания корреляций получаем

$$|\langle\xi_T\rangle-\langle\xi_{T_1}\rangle\langle\xi_{T_2}\rangle|<c_1\exp\{-c_2d\}\leqslant c_1.$$

Отсюда

$$|\langle\xi_T\rangle|\leqslant c_1+\max_{T_1,T_2:T_1\cup T_2=T}|\langle\xi_{T_1}\rangle\langle\xi_{T_2}\rangle|\leqslant c_1(|T|M)+\max_{1\leqslant i<k}b_ib_{k-i}=b_k,$$

и лемма доказана.

Лемма 3. Существуют константы c_3 и c_4 (c_3, $c_4>0$), зависящие лишь от $|T|$, такие, что

$$|\langle\xi_T\rangle^{\mathrm{tr}}|<c_3\exp\{-c_4d_T\},$$

где

$$d_T=\max_{A,B:A\cup B=T}d_{A,B},\quad d_{A,B}=d\Big(\operatorname{supp}\sum_{i\in A}|f_i|,\quad \operatorname{supp}\sum_{i\in B}|f_i|\Big).$$

Справедливость утверждения следует из леммы 2 и того, что при фиксированных A, B, $A\cup B=T$, величина $<\xi_T>^{\mathrm{tr}}$ представима как конечная сумма слагаемых вида

$$c(\langle\xi_{A'\cup B'}\rangle-\langle\xi_{A'}\rangle\langle\xi_{B'}\rangle)\prod_l\langle\xi_{T_l}\rangle, \tag{7}$$

где $A'\subset A$, $B'\subset B$, $A'\cup B'\bigcup_l T_l=T$. Докажем это индукцией по мощности набора T. При $|T|=1$ утверждение очевидно.

Пусть возможность разложения (7) доказана для всех T мощности, меньшей n. Набор T мощности n представим в виде объединения двух наборов A и B, таких, что $A, B\neq\varnothing$, $A\cup B=T$. Тогда

$$\langle\xi_T\rangle^{\mathrm{tr}}=\langle\xi_{A\cup B}\rangle-\sum_{\beta\neq I}\langle\xi_{T_1}\rangle^{\mathrm{tr}}\ldots\langle\xi_{T_{l(\beta)}}\rangle^{\mathrm{tr}}=$$

$$=\langle\xi_{A\cup B}\rangle-\langle\xi_A\rangle\langle\xi_B\rangle+\Big[\langle\xi_A\rangle\langle\xi_B\rangle-\sum_{\beta\neq I}\langle\xi_{T_1}\rangle^{\mathrm{tr}}\ldots\langle\xi_{T_{l(\beta)}}\rangle^{\mathrm{tr}}\Big].$$

Выражение в квадратных скобках представимо, очевидно, как конечная сумма слагаемых

$$-\langle\xi_{A'\cup B'}\rangle^{\mathrm{tr}}\prod_l\langle\xi_{T_l}\rangle^{\mathrm{tr}},$$

где $A'\subset A$, $B'\subset B$, $A'\cup B'\neq T$, $A'\cup B'\bigcup_l T_l=T$. Для всех таких слагаемых предположение индукции выполняется. Таким образом, представимость $<\xi_T>^{\mathrm{tr}}$ в виде конечной суммы слагаемых (7) показана. Использование леммы 2 для оценки $\prod_l<\xi_{T^l}>$ завершает доказательство леммы 3.

Множество всех наборов $R_n(V)=\{T:T\subset V,\ |T|=n\}$ разобьем на множества $R_n^d(V)=\{T:T\subset V,\ |T|=n,\ d_T=d\}$. Здесь $d_T=\max d_{T_1,T_2}$, то есть максимум взят по всевозможным разбиениям T на две части T_1, T_2, а d_{T_1,T_2} — расстояние между T_1 и T_2 (как множеств из $\mathbf{R}^\nu$).

Лемма 4. Мощность множества $R_n^d(V)$ допускает оценку

$$|R_n^d(V)|\leqslant|V|(2d+1)^{\nu n}n! \tag{8}$$

Доказательство. Определим d-путь на целочисленной решетке $\mathbf{Z}^\nu$ как последовательность точек $s_1, \dots, s_n, \dots$ ($s_i\in\mathbf{Z}^\nu$), удовлетворяющую условию $|s_i-s_{i+1}|\leqslant d$. Множество $Q\subset\mathbf{Z}^\nu$ назовем d-связным, если любые две его точки могут быть соединены d-путем, лежащим в Q. Нетрудно показать, что число d-связных множеств из p точек, содержащих заданную точку s_0, не превосходит $(2d)^{\nu p}$. Справедливость оценки (8) следует из того, что мощность множества $R_n^d(V)$ не превосходит числа d-связных множеств, лежащих внутри V. Лемма доказана.

Окончательный результат теоремы получаем так:

$$M_n[\tilde{\xi}(f_V)]\sim\frac{1}{D_0^{n/2}|V|^{n/2}}\left|\sum_{T:|T|=n}\langle\xi_T\rangle^{\mathrm{tr}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{D_0^{n/2}|V|^{n/2}}\sum_{d\geqslant0}|R_n^d(V)|\,c_3\exp\{-c_4d\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{D_0^{n/2}|V|^{n/2}}\sum_{d\geqslant0}|V|(2d+1)^{\nu n}n!\,c_3\exp\{-c_4d\}.$$

Выписанный ряд сходится, и при фиксированном $n\geqslant3$ его сумма стремится к нулю, если $V\to\infty$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев В. А. Центральная предельная теорема для гиббсовских случайных полей. — «Докл. АН СССР», 1975, 224, № 1, с. 35—39.
2. Аншелевич В. В. Центральная предельная теорема для некоммутативного стационарного случайного процесса. — «Успехи матем. наук», 1973, 28, № 5, с. 227—228.

Поступила в редакцию
21.7 1976 г.
Кафедра
теории вероятностей

V. A. Malishev
J. A. Terletskii

THE LIMIT THEOREM FOR NONCOMMUTATIVE FIELDS

In the present paper a random value is defined as an element of $*$-algebra $\mathfrak{A}$ upon which the state is given. Besides, let there be a continious mapping ξ from $L_2(\mathbf{R}^\nu)$ into $\mathfrak{A}$ satisfying the condition of weak exponential correlation decrease. The limit theorem for the random value $\xi(f_V)$ where $f_V(x)$ is the limitation upon the cube V of an arbitrary limited $f(x)$ is proved in the language of semi-invariants or truncated correlation function.